Métodos Numéricos
25 de octubre de 2021
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas

☐ Enviar aquí fotos claras y legibles de la resolución

☐ **Justificar todas las respuestas**

Nombre y Apellido

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota
35	30	35	100

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de rango r con $1 < r \leq n$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$. Definimos $B = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i\, u_i^t$ siendo v_i y u_i las columnas i-ésimas de V y U respectivamente.
   (a) Probar que $BAx = x$ para cualquier $x \in \langle v_1, \ldots, v_r\rangle$. (12 puntos)
   (b) Probar que $\|BA\|_2 = \|AB\|_2 = 1$. (13 puntos)
   (c) Siendo $A \neq I$, mostrar un ejemplo de matriz A para la cual $B = A^t$. Justificar. (10 puntos)

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $-3 < \alpha < 2$ y A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \alpha+1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   (a) Probar que el método de Jacobi converge. (15 puntos)
   (b) Probar que el método de Gauss-Seidel converge. (15 puntos)

   Sugerencia: cuando haga falta, use alguna norma conveniente.

3. En un sistema de control automático la variable de salida $y(t)$ en el instante t depende de los valores de la variable de entrada x en el mismo instante t y en el instante anterior $t-1$ según la relación lineal:

$$y(t) = a\,x(t) + b\,x(t-1)$$

   Se hacen varias mediciones, obteniéndose los siguientes valores, algunos de los cuales luego se han perdido (S/D significa 'Sin Datos'):

t	0	1	2	3
x	1	α	β	8
y	S/D	2	2	1

   Antes de que se perdieran los valores de $x(1)$ y $x(2)$ se aproximó en el sentido de cuadrados mínimos los valores de a y b, llegándose a la conclusión de que no había una solución única.

   (a) Hallar los valores perdidos α y β. (10 puntos)
   (b) Tiempo más tarde se encontró el resultado perdido de las mediciones en el instante $t = 4$ siguientes:

t	4
x	6
y	1

   Probar que con el conjunto completo de datos, la solución de cuadrados mínimos para estimar a y b es única. (10 puntos)

   (c) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
      i. **Si** la solución de cuadrados mínimos para $Ax = b$ es única **entonces** $Ax = b$ tiene solución. (7 puntos)
      ii. **Si** $Ax = b$ tiene solución **entonces** la solución de cuadrados mínimos para $Ax = b$ es única.(8 puntos)

1) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz de rango r con $1 \leq r \leq n$ y

$A = U \Sigma V^t$ descomposición en valores singulares /

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

$B = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t$ v_i y u_i las columnas

i-ésimas de V y U.

a) Probar que $BAx = x$ para cualquier $x \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$

$BA = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t \right) (U \Sigma V^t)$

$= \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t U \Sigma V^t \right) =$ U es ortogonal $\Rightarrow u_i^t u_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i=j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

~~$= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i e_i^t \Sigma V x = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i \sigma_i e_i^t V x =$~~

~~$= \sum_{i=1}^{r} e_i^t V \dots = \sum_{i=1}^{r}$~~

V ortogonal $\Rightarrow u_i^t \dots = \begin{cases} 0 \text{ si } i=j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

~~V es ortogonal~~

~~$= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i e_i^t \Sigma V x = \sum_{i=1}^{r} \frac{\sigma_i}{\sigma_i} v_i e_i^t V x =$~~

~~$= \sum_{i=1}^{r} \dots \sum e_i^t \dots$ posición ...~~

~~$= \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{\sigma_i} v_i e_i^t \Sigma V \right) x = \sum_{i=1}^{r}$~~

HOJA N°

FECHA

$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i e_i^t \Sigma V^t = (*)$$

$$e_i^t \Sigma = (0 \dots \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-ésimo} \\ 1\times n}}{1} \dots 0) \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \sigma_i & & \\ & & & \sigma_r & \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= (0 \dots \sigma_i \dots 0)$$

$$\Rightarrow (*) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\cancel{\sigma_i}} v_i \cancel{\sigma_i} e_i^t V^t$$

$$= \sum_{i=1}^{r} v_i \underbrace{e_i^t V^t}_{\substack{i\text{-ésima} \\ \text{Fila de } V^t}} = \sum_{i=1}^{r} v_i v_i^t$$

$\Rightarrow \forall x \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, x se puede escribir como combinación lineal de los v_i linealmente

$$\Rightarrow x = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$$

$$\Rightarrow ABx = \left(\sum_{i=1}^{r} v_i v_i^t\right)\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} v_i \left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_i^t v_j\right)$$

Por ser V ortogonal, $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ forman una base ortonormal

$$\overset{*}{=} \sum_{i=1}^{r} v_i \alpha_i = x.$$

12/12

$\Rightarrow v_i^t v_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases} \Rightarrow$ Sólo sobrevive el término $i=j$

b) $\|BA\|_2 = \|AB\|_2 = 1$

Por Thm a (*) justificar

$\cancel{\|BA\|_2 = \max_{x:\|x\|_2=1} \|BAx\| = \max_{x:\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1}$

$\cancel{AB = \ldots}$

$\cancel{AB = U\Sigma V^t \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t}$

$\cancel{= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} U \Sigma \underbrace{V^t v_i}_{e_i \text{ pues } V \text{ ortogonal}} u_i^t}$

$\cancel{= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} U \Sigma e_i u_i^t}$

$\cancel{= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} U \sigma_i e_i u_i^t}$

$\cancel{= \sum_{i=1}^{r} U u_i^t = \sum_{i=1}^{r} e_i}$

(*)

Como V es ortogonal $\Rightarrow$ sus columnas forman una base ortonormal.

$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

Si tomamos $S_1 = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ y $S_2 = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$

Sea $x_1 \in S_1$ y $x_2 \in S_2$ $\quad x_1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \quad x_2 = \sum_{j=r+1}^{n} \beta_j v_j$

$$\Rightarrow x_1^t x_2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\right)\left(\sum_{j=r+1}^{n} \beta_j v_j^t\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \Big(\sum_{j=r+1}^{n} \beta_j \underbrace{v_i v_j^t}_{=0 \text{ pues } i \neq j} \Big) = 0$$

$\therefore \quad S_2 = S_1^{\perp} \Rightarrow S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists!\ s_1, s_2 \ / \ x = s_1 + s_2$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 = 1 \quad \|BAx\|_2 = \|BA(s_1+s_2)\|_2$

$= \|BAs_1 + BAs_2\|_2 =$

pues $i \neq j$

$$BA\,s_2 \underset{\text{ítem a}}{=} \sum_{i=1}^{r} v_i v_i^t \left(\sum_{j=r+1}^{n} \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{r} v_i \left(\sum_{j=r+1}^{n} \beta_j \underbrace{v_i^t v_j}_{=0}\right)$$

$BA\,s_2 = 0$

$\Rightarrow \|BAs_1 + BAs_2\|_2 = \|BAs_1 + 0\|_2 \overset{\text{ítem a}}{=} \|s_1\|_2$

$\cancel{\|x\|_2 = \|s_1 + s_2\|_2 = 1}$

~~Por teorema de pitágoras~~ $\cancel{(s_1 \perp s_2)}$

$\cancel{\|s_1 + s_2\|_2^2 = \|s_1\|_2^2 + \|s_2\|_2^2 = 1^2}$

$\cancel{\Leftrightarrow \|s_1\|_2^2}$

$\cancel{s_1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \Rightarrow \|s_1\|_2^2 = \|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\|_2^2}$

$\cancel{v_i \perp v_j \ \forall i \neq j \Rightarrow}$ ~~Por pitágoras~~ $\cancel{\|v_i + v_j\|_2^2 = \|v_i\|_2^2 + \|v_j\|_2^2}$

$\cancel{\Rightarrow \|s_1\|_2^2 = \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i|^2 \|v_i\|_2^2}$

$\|y\|_2 = \|D_1 + D_2\|_2 = 1$

Por teorema de pitágoras ($D_1 \perp D_2$)

$$\|D_1+D_2\|_2^2 = \|D_1\|_2^2 + \|D_2\|_2^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow \|D_1\|_2^2 \leq 1 \Leftrightarrow \|D_1\|_2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \|BA\|_2 = \max_{x:\|x\|_2=1} \|BAx\|_2 = 1$$

tomando $x / \|D_1\|_2 = 1$

Por ejemplo, v_1

$$AB = U\Sigma V^t \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} U\Sigma \underbrace{V^t v_i}_{e_i \text{ pues V ortogonal}} u_i^t$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} U\Sigma e_i u_i^t$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{\sigma_i}{\sigma_i} U e_i u_i^t$$

$$= \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^t$$

~~Como U es ortogonal $\Rightarrow$ sus columnas forman una base ortonormal~~

~~$\Rightarrow AB$ ... $\{u_1, \dots, u_n\} = \mathbb{R}^n$~~

~~$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \; x = \sum_{i=1}$~~

Si tomo $x \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, al igual que en el item a usando r_i, x se puede escribir como combinación lineal de $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$

$$\Rightarrow ABx = 0.$$

luego, con el mismo razonamiento utilizado sobre las columnas de V,

~~$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$~~ $\tilde{S}_1 = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ y $S_2 = \langle u_{r+1}, \ldots, u_n \rangle$

están en suma directa. y $S_1 = S_2^{\perp}$

y $\exists!\ \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x = \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2$

$$\Rightarrow \|ABx\|_2 = \|AB\tilde{\delta}_1 + \underbrace{AB\tilde{\delta}_2}_{=0}\|_2 \overset{\text{item a}}{=} \|\delta_1\|_2$$

y usando pitágoras nuevamente se puede ver que $\|\delta_1\|_2 \leq 1$

$$\therefore \|AB\|_2 = \max_{x : \|x\|_2 = 1} \|ABx\|_2 = 1$$

tomando un $x \ / \ \|\delta_1\|_2 = 1$.

luego $\|AB\|_2 = \|BA\|_2 = 1$

13/13

c) $A \neq I$ ejemplo de A / $B = A^t$.

si tomo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Los valores singulares de A son los autovalores de A^tA

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~~Por ser una matriz diagonal los autovalores son 0 y 1 (los elementos de la diagonal)~~

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U \Sigma V^t = I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} I$$

$rg(A) = 2$

$$B = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0) + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{simétrica.}} = A = B^t.$$

⊛ $\det(A^tA - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$= (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)$

$\Rightarrow$ 1 y 0 autovalores.

10/10

HOJA N°

FECHA

2) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ / $-3 < \alpha < 2$ y

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \alpha+1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Probar que el método de Jacobi converge

~~a) Probar que el método de Jacobi converge.~~

El método de Jacobi converge $\iff \rho(T) < 1$ donde T es la matriz que gobierna la iteración y ρ es el radio espectral, es decir, el autovalor mayor en módulo.

$T_J = D^{-1}(L+U)$ donde D es diagonal, L triangular inferior (estricto) y U triangular superior (estricto)

$$A = D - L - U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\alpha-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D^{-1} existe pues D es diagonal con todos los elementos de la diagonal positivos

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \quad L+U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\alpha-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\alpha-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha-1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA

El método converge $\iff \rho(T_j) < 1$ y $\rho(T) \leq \|T\|$ para alguna norma inducida $\Rightarrow \rho(T) \leq \|T\| < 1 \Rightarrow$

Qvq $\|T_j\|_1 < 1$ (si esto pasa, el método converge a una solución para cualquier x_0 inicial)

$$\|T_j\|_1 = \max_{j=1,2,3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}|$$

$\underline{\text{si } j=1}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{1}{2}\right| + \underbrace{\left|\frac{-(\alpha+1)}{6}\right|}_{\left|\frac{\alpha+1}{6}\right|} = \sum_{i=1}^{3} |a_{i1}|$

$\underline{\text{si } j=2}$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{3} |a_{i2}| = \left|-\frac{\alpha}{3}\right| = \left|\frac{\alpha}{3}\right|$

$\underline{\text{si } j=3}$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{3} |a_{i3}| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Como $-3 < \alpha < 2$

$\Rightarrow$ El máximo valor que puede tomar:

∙) $\left|\frac{\alpha+1}{6}\right|$ es menor a $\frac{1}{2}$ (tomando $\alpha=2$) (con $\alpha=-3$ es $\frac{1}{3}$)

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

∙) $\left|\frac{\alpha}{3}\right| < 1$ $(\alpha = -3)$

$\max\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right\} = 1$

15/15

$\|T_j\|_1 < 1 \quad \forall \alpha \in (-3, 2)$

b) ~~Ahora~~ Probar que el método de Gauss-Seidel converge:

$T_{GS} = (D-L)^{-1}U$

$$D-L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \alpha+1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Es inversible pues es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.

$$\Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 0 \\ -\frac{(\alpha+1)}{18} & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

<u>Verifico</u>:
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \alpha+1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 0 \\ -\frac{(\alpha+1)}{18} & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~~Al igual que en el primer caso calculo norma 1 de T_{GS}~~

$$\Rightarrow T_{GS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 0 \\ -\frac{(\alpha+1)}{18} & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha/3 & 1/3 \\ 0 & -\alpha/6 & 1/6 \\ 0 & \frac{\alpha(\alpha+1)}{18} & -\frac{(\alpha+1)}{18} \end{pmatrix}$$

El método converge $\Leftrightarrow \rho(T_{GS}) < 1$

$\Leftrightarrow$ máx autovalor en módulo de T_{GS} es menor a 1

Busco autovalores de T_{GS}, son las raíces de $p(\lambda) = \det(T_{GS} - \lambda I)$

$$\det(T_{GS} - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{\alpha}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\alpha}{6} - \lambda & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)}{18} & -\frac{(\alpha+1)}{18} - \lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollo por 1° columna

$$\stackrel{\uparrow}{=} -\lambda \det\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{6} - \lambda & \frac{1}{6} \\ \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)}{18} & -\frac{(\alpha+1)}{18} - \lambda \end{pmatrix} - 0 + 0$$

$$= -\lambda \left[\left(-\frac{\alpha}{6} - \lambda\right)\left(-\frac{(\alpha+1)}{18} - \lambda\right) - \left(\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)}{18} \frac{1}{6}\right) \right]$$

$$= -\lambda \left[\left(\frac{\alpha}{6} \frac{(\alpha+1)}{18} + \frac{\alpha}{6}\lambda + \frac{(\alpha+1)}{18}\lambda + \lambda^2 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{18 \cdot 6} \right) \right]$$

$$= -\cancel{\frac{(\alpha^2+\alpha)}{108}\lambda} - \frac{\alpha}{6}\lambda^2 - \frac{(\alpha+1)}{18}\lambda^2 - \lambda^3 + \cancel{\frac{(\alpha^2+\alpha)}{108}\lambda}$$

$$= -\lambda^3 - \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{(\alpha+1)}{18}\right)\lambda^2$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = -\lambda^3 - \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{(\alpha+1)}{18}\right)\lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2\left(-\lambda - \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{(\alpha+1)}{18}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -\frac{\alpha}{6} - \frac{(\alpha+1)}{18} = -\frac{(4\alpha+1)}{18}$$

$\Rightarrow \rho(T_J) = \max\left\{ 0, \left| -\frac{(4\alpha+1)}{18} \right| \right\}$

como $-3 < \alpha < 2$

desigualdad triangular

$\left| -\frac{(4\alpha+1)}{18} \right| = \left| \frac{-4\alpha-1}{18} \right| \leq \frac{|-4||\alpha|}{18} + \frac{1}{18}$

$\Rightarrow \frac{4|\alpha|}{18} + \frac{1}{18} < \frac{13}{18}$ (cuando $|\alpha| = |-3|$)

$\Rightarrow$ Si el máximo es 0, $\rho(T_J) < 1$

$\therefore$ El método converge.

Si el máximo es $\left| \frac{-(4\alpha+1)}{18} \right| < \frac{13}{18} < 1$

$\therefore$ El método converge.

15/15

3) $y(t) = ax(t) + bx(t-1)$

a) Aproximar por cuadrados mínimos es minimizar la norma:

~~encontrar el mínimo de~~

$\|Ax-b\|_2$, donde $A = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_n) \\ \vdots & & \\ \phi_1(x_m) & \cdots & \phi_n(x_m) \end{pmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

~~En este caso, las funciones son~~

~~ϕ_1~~

En este caso: $A = \begin{pmatrix} x(1) & x(0) \\ x(2) & x(1) \\ x(3) & x(2) \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ Como no hay datos cuando $t=0$, no lo incluyo.

El problema de cuadrados mínimos lineal tiene solución única $\Leftrightarrow$ las columnas de A son LI, $\therefore$ en este caso, busco que las columnas de A sean LD, entonces una es múltiplo de la otra:

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k \\ \beta = k\alpha \\ \delta = k\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k \\ \beta = k^2 \\ \delta = k^3 \Leftrightarrow k = 2 \end{cases}$

10/10

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2 \quad y \quad \beta = 4}$

b) La nueva A es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 8 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Supongo que sus columnas son LD

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ 4 = 2k \\ 8 = 4k \\ 6 = 8k \Leftrightarrow 6 = 8 \cdot 2 = 16 \end{cases}$ Abs.

∴ Las columnas de A son LI y el problema de CM tiene solución única.

10/10

c) i - falso. Uso un contraejemplo

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Es obvio que las columnas de A son linealmente independientes pues son e_3 y e_2.

$\Rightarrow$ La solución de CM de $Ax = b$ es única.

Pero $Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ Abs!

∴ $Ax = b$ no tiene solución.

7/7

ii) falso, nuevamente uso un contra ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas de A son LD $\therefore$ $Ax = b$ no tiene solución única, pero

$$Ax = b \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Si tomo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}1}{\cancel{2}} = 2.$

y $Ax = b$ tiene solución

8/8